# 4. Συνεχείς Απεικονίσεις-Ισοδύναμες Μετρικές

**Άσκηση 1.**
Με χρήση του Θεωρήματος ότι οι συνεχείς απεικονίσεις είναι αυτές οι οποίες αντιστρέφουν ανοιχτά (αντ. κλειστά), σε ανοιχτά (αντ. κλειστά) σύνολα, αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq 0 \\ x-2 & , \quad x < 0 \end{cases},$$

δεν είναι συνεχής.

**Άσκηση 2.**
Ας είναι μετρικοί χώροι $(X,\rho)$ $(Y,d)$ και μία απεικόνιση $f\colon X \to Y$. Να αποδείξετε ότι:

(i) αν για κάθε $A \subset X$ ισχύει $f(A') \subset (f(A))'$, τότε η $f$ είναι συνεχής (ισχύει το αντίστροφο;).

(ii) η $f$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $A \subset Y$ ισχύει $f^{-1}(A^o) \subset (f^{-1}(A))^o$.

(iii) η $f$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $A \subset Y$ ισχύει $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

**Άσκηση 3.**
Ας είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις $f,g\colon (X,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά στον μετρικό χώρο $(X,d)$.

(i) $A = \{x \in X : -1 < f(x) < 0\}$

(ii) $B = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$

(iii) $C = \{x \in X : g^3(x) - 3f(x) < 0\}$

**Άσκηση 4.**

(i) Δίνεται μία απεικόνιση $f\colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (Y, d_0)$, όπου $d_0$ η διακριτή μετρική. Αποδείξτε ότι $f$ συνεχής αν και μόνο αν είναι σταθερή.

(ii) Τεκμηριώστε για ποιό λόγο η ευκλείδεια μετρική (στον $\mathbb{R}$) δεν είναι ισοδύναμη με την διακριτή μετρική (στον $\mathbb{R}$). Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε τη διακριτή μετρική του $\mathbb{R}$ με τη μετρική $d_1 = \min\{1, |\cdot|\}$ ή με τη μετρική $d_2 = \dfrac{|\cdot|}{1+|\cdot|}$ ;

**Άσκηση 5.**
Εξετάστε αν ισχύουν τα παρακάτω:

(i) το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.

(ii) το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.

(iii) το $\mathbb{Q}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.

(iv) το $\mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}$.

(v) το $(0,+\infty)$ είναι ομοιομορφικό με το $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

**Άσκηση 6.**
Αν $f\colon (X,d_1) \to (Y,d_2)$ είναι μία 1-1, επί και συνεχής απεικόνιση , τότε αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) $f$ ανοιχτή (δηλ. απεικονίζει $d_1$- ανοιχτά σύνολα σε $d_2$-ανοιχτά σύνολα)

(ii) $f$ κλειστή (δηλ. απεικονίζει $d_1$- κλειστά σύνολα σε $d_2$-κλειστά σύνολα)

(iii) $f^{-1}$ είναι συνεχής

Συνολικά λοιπόν αν $f$ συνεχής και ανοιχτή (ή κλειστή), τότε η $f$ είναι ομοιομορφισμός.
**Έξτρα:** Να δώσετε παράδειγμα συνεχούς απεικόνισης που δεν είναι ανοιχτή (αντ. κλειστή) και παράδειγμα ανοιχτής (αντ. κλειστής) απεικόνισης που δεν είναι συνεχής.

### Άσκηση 7.

(i) Να αποδείξετε ότι η μετρική $d(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι ισοδύναμη με την ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{R}$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η ευκλείδεια μετρική ορισμένη στο $\mathbb{Z}$ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική $d_0$ στο $\mathbb{Z}$.

(iii) Έστω $(X,\rho)$ ένας μετρικός χώρος και ορίζουμε την μετρική $d(x,y) = (\rho(x,y))^{1/2}$, για $(x,y) \in X \times X$. Να εξετάσετε αν η $d$ είναι ισοδύναμη με τη $\rho$.

(iv) Εφοδιάζουμε ένα σύνολο $X = (0,1)$ με τις μετρικές $\rho(x,y) = |x-y|$ και $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, για $x,y \in (0,1)$. Αποδείξτε ότι οι μετρικές $d$ και $\rho$ είναι ισοδύναμες. Έπειτα, αποδείξτε ότι υπάρχει βασική ακολουθία του $(X,\rho)$ η οποία να μην είναι βασική ακολουθία του $(X,d)$ (Υπόδειξη: Κάνετε χρήση της ακολουθίας $x_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$).

(v) Είναι η έννοια του φραγμένου μετρικού χώρου τοπολογική ιδιότητα;

(vi) Αποδείξτε ότι η πυκνότητα ενός συνόλου διατηρείται και στην εικόνα του μέσω μιας συνεχούς και επί συνάρτησης.

## Υποδείξεις Ασκήσεων

### Άσκηση 1.

Για $A := (-1,2)$ έχουμε $f^{-1}((-1,2)) = [0,1)$ (γιατί;).

### Άσκηση 2

(i) για κάθε $A \subset X$ θα αποδείξουμε ότι $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Είναι,

$$f(\overline{A}) = f(A' \cup A) = f(A') \cup f(A) \subset f(A) \cup (f(A))' = \overline{f(A)}.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει, για παράδειγμα η συνεχής συνάρτηση $f\colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ με $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ είναι τέτοια, ώστε

$$(f(\mathbb{R}))' = \{0\}' = \emptyset \subset f(\mathbb{R}') = f(\mathbb{R}) = \{0\}$$

(ii) **Για το ικανό:** Επειδή το $A^o$ είναι το μέγιστο ανοιχτό υποσύνολο του $A$, αρκεί να αποδείξουμε ότι το $f^{-1}(A^o)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $f^{-1}(A)$. Πράγματι, τούτο το σύνολο είναι ανοιχτό υποσύνολο του $f^{-1}(A)$ , διότι η $f$ είναι συνεχής και άρα, αντιστρέφει ανοιχτά σε ανοιχτά σύνολα και επίσης $A^o \subset A$.
**Για το αναγκαίο:** Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f$ αντιστρέφει ανοιχτά σε ανοιχτά σύνολα. Έστω $A$ ανοιχτό υποσύνολο του $Y$. Εφόσον, $A = A^o$ και από την υπόθεση, έχουμε

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A^o) \subset (f^{-1}(A))^o.$$

(iii) Η απόδειξη είναι ανάλογη της (ii).

### Άσκηση 3

(i) $A = f^{-1}((-1,0))$ ανοιχτό ως αντίστροφη εικόνα του ανοιχτού συνόλου $(-1,0)$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης $f$.

(ii) $B = G^{-1}((0,+\infty))$ ανοιχτό ως αντίστροφη εικόνα του ανοιχτού συνόλου $(0,+\infty)$ μέσω τις συνεχούς συνάρτησης $G = f - g$.

(iii) $C = H^{-1}((-\infty,0))$ ανοιχτό ως αντίστροφη εικόνα του ανοιχτού συνόλου $(-\infty,0)$ μέσω τις συνεχούς συνάρτησης $H = g^3 - 3f$.

### Άσκηση 4

(i) Αρχικά αν $f$ σταθερή τότε προφανώς είναι συνεχής. Αντίστροφα, κάθε συνεχής συνάρτηση $f\colon (\mathbb{R},|\cdot|) \to (Y,d_0)$ είναι σταθερή. Πράγματι, εφόσον $f$ συνεχής αντιστρέφει ανοιχτά υποσύνολα του $Y$ σε ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ιδιαίτερα, για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ κάθε σύνολο $\{y_0\}$ στον $Y$, όπου $y_0 = f(x_0)$ (το οποίο είναι ανοιχτό και κλειστό ως υποσύνολο του διακριτού μετρικού χώρου $Y$) έχει αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{y_0\})$ ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αλλά αυτό μπορεί να συμβεί μονάχα όταν $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$ ή $f^{-1}(\{y_0\}) = \mathbb{R}$. Επειδή, το $x_0 \in \mathbb{R}$ σίγουρα το $f^{-1}(\{y_0\}) = \mathbb{R}$ και άρα $f(x) = y_0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) α′ τρόπος: Η ταυτοτική απεικόνιση $Id\colon (\mathbb{R},|\cdot|) \to (\mathbb{R},d_0)$ δεν είναι συνεχής (γιατί;)
β′ τρόπος: Από το πρώτο ερώτημα αν $Y = \mathbb{R}$ και επιλεξουμε μία συνάρτηση $f$ η οποία δεν είναι σταθερή, τότε δεν θα είναι συνεχής.
γ′ τρόπος: Η $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι $|\cdot|-$συγκλίνουσα στο 0 αλλά όχι $d_0-$συγκλίνουσα (στο 0) γιατί αν ήταν, τότε θα έπρεπε η $(x_n)$ να ήταν τελικά σταθερή (εξηγήστε το).
Επίσης, οι άλλες δύο μετρικές, είναι ισοδύναμες με την ευκλείδεια του $\mathbb{R}$, διότι το σύνολο τον συγκλινουσών ακολουθιών της $d_1$ ή $d_2$ ταυτίζεται με το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών της ευκλείδειας μετρικής. Πράγματι, για την $d_1$ έχουμε ότι για όλες τις επιλογές ακολουθιών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ οι οποίες είναι $|\cdot|-$συγκλινουσες σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $|x_n - x| \to 0$ ισχύει ότι $d_1(x_n,x) \to 0$, γιατί για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $d(x_n,x_0) \leq |x_n - x|$. Από την άλλη μεριά, εφόσον για όλες τις επιλογές ακολουθιών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ οι οποίες είναι $d_1-$συγκλινουσες σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$, και άρα για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ ισχύει $d_1(x_n,x) < \varepsilon < 1$, τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και αφού $d_1(x_n,x) = \min\{1,|x_n - x|\}, n \in \mathbb{N}$, συνάγουμε ότι $|x_n - x| < \varepsilon$, τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εξηγήστε εσείς τώρα γιατί οι $d_2$ και $|\cdot|$ είναι ισοδύναμες μετρικές.

### Άσκηση 5

(i) Φανερά το $\mathbb{R}$ όχι ομοιομορφικό του $\mathbb{Z}$ καθώς το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο ένω το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρξει μια 1-1 και επί συνάρτηση από το ένα στο άλλο.

(ii) Όμοια με το (i) αφού το $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο σύνολο δεν αποτελεί ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}$.

(iii) Αν υποθέσουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι ομοιομορφικό του $\mathbb{Z}$ τότε θα υπάρχει συνάρτηση $f\colon Q \to \mathbb{Z}$. Έστω μία ακολουθία $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρητών με $q_n = \frac{1}{n}$. Λόγω συνέχειας της $f$ από την Αρχή της Μεταφοράς $f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(0)$. Αυτό σημαίνει ότι η $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ πρέπει να είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(0)$ (γιατί;). Άρα, υπάρχει $n_0$ ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$, για κάθε $n > n_0$. Όμως, η $f$ είναι 1-1 και επομένως $\frac{1}{n} = 0$, για κάθε $n > n_0$, πράγμα αδύνατο.

(iv) Γενικά $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$ είναι ισοπληθικά. Οπότε, υπάρχει μια $H$ 1-1 και επί συνάρτηση από το ένα στο άλλο. Επίσης, κάθε συνάρτηση $f\colon \mathbb{N} \to (X,d)$ και όμοια $g\colon \mathbb{Z} \to (Y,\rho)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς συναρτήσεις (αρκεί να επιλέξουμε ως $\delta \in (0,1]$). Έτσι, η $H$ είναι ομοιομορφισμός.

(v) Αν υποθέσουμε πως είχαμε ομοιομορφισμό του ενός συνόλου με το άλλο τότε θα υπήρχε μια συνεχής και επί συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to (0,1) \cup (1,+\infty)$. Αλλά αυτό είναι άτοπο από το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής καθώς σε τέτοια περίπτωση θα έπρεπε το σύνολο $(0,1) \cup (1,+\infty)$ να ήταν διάστημα.

**Άσκηση 6**

**Από το (i) στο (ii)** : Έστω $f$ ανοιχτή απεικόνιση και έστω επίσης $F$ κλειστό υποσύνολο του $X$. Τότε, επειδή $f$ 1-1 και επί $f(X \setminus F) = X \setminus f(F)$. Όμως, από την υπόθεση τούτο το σύνολο είναι και ανοιχτό στον $Y$. Άρα, $f(F)$ κλειστό στον $Y$.
**Από το (ii) στο (iii)**: Έστω $f$ κλειστή απεικόνιση. Τότε, για κάθε $F$ κλειστό στον $X$ ισχύει ότι το $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Y$. Άρα, η $f^{-1}$ είναι συνεχής απεικόνιση.
**Από το (iii) στο (i)**: Έστω ότι η $f^{-1}$ είναι συνεχής απεικόνιση. Τότε, για κάθε $U$ ανοιχτό στον $X$ ισχύει ότι το $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ είναι ανοιχτίο υποσύνολο του $Y$. Άρα, η $f$ είναι ανοιχτή απεικόνιση. Από παραδείγματα τώρα έχουμε τα εξής:

(1) Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ είναι συνέχής, αλλά $f((-1,1)) = [0,1)$.

(2) Η ταυτοτική συνάρτηση $Id\colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d_0)$ όπου $d_0$ η διακριτή μετρική είναι ανοιχτή καθώς για κάθε ανοιχτό $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει ότι $Id(A) = A$ είναι και $d_0-$ανοιχτό ως υποσύνολο του διακριτού, αλλά όχι συνεχής (πχ το $d_0-$ανοιχτό σύνολο $\{a\}$, για $a \in R$ δεν το αντιστρέφεται σε $|\cdot|$-ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$).

(3) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ είναι συνεχής , αλλά $f([1,+\infty)) = (0,1]$.

(4) Η ταυτοτική συνάρτηση $Id\colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d_0)$ όπου $d_0$ η διακριτή μετρική είναι κλειστή καθώς για κάθε κλειστό $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει ότι $Id(A) = A$ είναι και $d_0-$κλειστό ως υποσύνολο του διακριτού, αλλά όχι συνεχής (πχ το $d_0-$κλειστό σύνολο $(0,1)$ δεν το αντιστρέφεται σε $|\cdot|$-κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$).

**Άσκηση 7**

(i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι τυχούσα $|\cdot|-$ συγκλίνουσα ακολουθία είναι $d-$συγκλίνουσα και αντίστροφα. Έστω λοιπόν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και κάποιο $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$. Από το Αρχή της Μεταφοράς για τη συνάρτηση $f(x) = \operatorname{Arctan} x,\ x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $f(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} f(x)$. Οπότε, $x_n \xrightarrow{d} x$. Όμοια και αντιστρόφως αλλά για την $f^{-1}(x) = \tan x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Όμοια με το (i) θα αποδείξουμε ότι τυχούσα $|\cdot|-$ συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{Z}$ είναι $d_0-$συγκλίνουσα στο $\mathbb{Z}$ και αντίστροφα. Αν λοιπόν μία ακολουθία $d_0-$συγκλίνουσα στο $\mathbb{Z}$, είναι και τελικά σταθερή (γιατί;), οπότε από ένα σημείο και έπειτα λαμβάνει διαρκώς την σταθερή ακέραια τιμή $x$. Οπότε, είναι και $|\cdot|-$συγκλινουσα στο $\mathbb{Z}$. Όμοια και το αντίστροφο (θέστε πχ $\epsilon = 1$ στην υπόθεση της $|\cdot|-$ σύγκλισης και άρα η ακολουθία είναι τελικά σταθερή. Άρα και συγκλινουσα ως προς οποιαδήποτε μετρική!!

(iii) Αφήνεται ως άσκηση (θα το κάνετε παρόμοια με τα δύο προηγούμενα).

(iv) Το πρώτο μέρος της ισοδυναμίας των $\rho$ και $d$ αφήνεται ως άσκηση (γίνεται ομοίως με τα τρία προηγούμενα ζητήματα). Τωρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$ είναι βασική στον $((0,1),\rho)$ (που είναι μια στοιχειώδεις άσκηση απειροστικού λογισμού 1, μέσω του ορισμού, δηλαδή για προκαθορισμένο $\epsilon > 0$, βρείτε έναν κατάλληλο $n_0$ ώστε $\forall\, m,n \geq n_0$ να ισχύει $|x_m - x_n| < \epsilon$ ή ακόμα μπορείτε άμεσα να πείτε ότι είναι συγκλινουσα στο 0, άρα είναι και βασική ακολουθία) αλλά δεν είναι βασική στον $((0,1),d)$. Πράγματι, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όχι βασική στον $((0,1),d)$, διότι $d(x_n,x_m) = |n+1-m-1| = |n-m| \geq 1,\ \forall n \neq m$.

(v) Η έννοια του φραγμένου δεν είναι τοπολογική ιδιότητα, πχ αν εφοδιάσουμε στον $\mathbb{R}$ τις μετρικές $|\cdot|$ και $d = \dfrac{|\cdot|}{1+|\cdot|}$ τότε αυτές είναι ισοδύναμες αλλά ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ όχι φραγμένος, ενώ ο $(\mathbb{R},d)$ είναι φραγμένος.

(vi) Ας είναι οι μετρικοί χώροι $(X,\rho)$ και $(Y,d)$ και $f\colon X \to Y$ συνεχής και επί. Αν $A$ πυκνό υποσύνολο του $(X,d)$, θα αποδείξουμε ότι το $f(A)$ είναι πυκνό υποσύνολο του $Y$. Έστω $y \in Y$, και επειδή $f$ επί, $y = f(x)$, για κάποιο $x \in X$. Εφόσον $A$ είναι πυκνό υποσύνολο του $X$, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $A$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και επειδή η $f$ είναι συνεχής, από την Αρχή της Μεταφοράς συνάγουμε ότι $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$. Οπότε, θέτοντας $y_n = f(x_n),\ n \in \mathbb{N}$ προκύπτει ότι το $f(A)$ είναι πυκνό στον $Y$.